音速について

理想気体を考える．非粘性（流体摩擦無し），非熱伝導，外力無し，外部熱源なしのとき，必要な基礎式は以下のように表される．

＜質量保存則＞

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)=0 \tag{1}$$

＜運動方程式＞

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt}=-\vec{\nabla}p \tag{2}$$

＜状態方程式＞

$$p=\rho RT \tag{3}$$

熱力学の第一法則により，等エントロピー過程は次式で与えられる．

$$Tds=du+pdv=0$$
$$\therefore\quad dh=\underbrace{du+pdv}_{0}+vdp \tag{4}$$

ここに， s は比エントロピー， u は比内部エネルギー， v は比体積（密度 ρ の逆数）， h は比エンタルピーである．比エンタルピー h と定圧比熱 c_p の関係式は，次式で与えられる．

$$dh=\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT+\underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T}_{0} dp=c_p dT \tag{5}$$

式(4)の $dh=vdp$ を，密度を使って書き直し，実質微分に変換することにより，次式を得る．

$$\rho c_p\frac{DT}{Dt}=\frac{Dp}{Dt} \tag{6}$$

あるいは，式(4)の最初の式の第二項 pdv は，式(1)を用いて

$$p\frac{Dv}{Dt}=p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)=-\frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}=\frac{p}{\rho}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) \tag{7}$$

と変形でき，さらに比内部エネルギー u と定積比熱 c_v の関係式は，次式で与えられるので，

$$du=\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT+\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_T}_{0} dv=c_v dT \tag{8}$$

結局，式(4)の $du+pdv=0$ より，次式を得ることができる．

$$\rho c_v\frac{DT}{Dt}=-p\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) \tag{9}$$

式(6)あるいは式(9)が，等エントロピー状態でのエネルギー方程式と考えられる．それらは以下と同等である．

$$c_p dT = v dp,\quad c_v dT = -p dv \tag{10}$$

それを示すために，両式から温度を消去し，積分すると，

$$\gamma \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dp}{p}$$
$$\gamma \ln v + \ln p = \text{const.}$$
$$p = c_1 \rho^{\gamma} \tag{11}$$

ここで，c_1 は定数，$\gamma = c_p / c_v$ は比熱比である．なお，ここまで状態方程式(3)は直接的には使っていないが，式(10)の両式の差をとれば状態方程式となる（$\because \quad c_p - c_v = R$）．

次に，流体は静止で p_0，ρ_0，T_0 の一定状態に対して，微小変動を考える．まず，密度を

$$\rho = \rho_0 + \rho' \tag{12}$$

とすれば，式(11)より，二項定理を用いて圧力は以下のように近似的に展開できる．

$$p = c_1 \left(\rho_0 + \rho'\right)^{\gamma} = c_1 \rho_0{}^{\gamma} \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)^{\gamma} \cong c_1 \rho_0{}^{\gamma} \left(1 + \gamma \frac{\rho'}{\rho_0}\right) = p_0 + p' \tag{13}$$

これより，

$$p' = c_1 \rho_0{}^{\gamma} \gamma \frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \rho' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \rho' \tag{14}$$

と書ける（式(14)の最後の等号の成立理由は，式(11)に因る）．ところで，式(1), (2)の線形化された方程式は，微小項どうしの積を無視することにより，以下のようになる．

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}'\right) = 0 \tag{15}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} = -\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \vec{\nabla} \rho' \tag{16}$$

それぞれ，式(15)の時間微分および式(16)の発散をとり，速度変動を消去すれば，次の波動方程式を得る．

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = c_s{}^2 \nabla^2 \rho', \quad \left(\text{where} \quad c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma R T_0}\right) \tag{17}$$

ここに，c_s は波の位相速度（音速）を表す．変動速度，圧力，温度に対しても同様に波動

方程式が得られる．等エントロピー過程における音速c_sは実際に観測される音速の値に極めて近いことが知られている．

参考までに，等温過程における音速を考えてみよう．微小変動を考え，式(3)の状態方程式を線形化すると，

$$p' = R\left(\rho_0 \underbrace{T'}_{0} + T_0\rho'\right) = RT_0\rho' = \frac{p_0}{\rho_0}\rho' \tag{18}$$

これより，線形化された運動方程式は，

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} = -\frac{p_0}{\rho_0}\vec{\nabla}\rho' \tag{19}$$

この式は，式(16)と比べてγが含まれない．一方で，式(15)には変更はない．したがって，等温音速は，次式で与えられる．

$$c_T = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T} = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{RT_0} \tag{20}$$

空気の場合，比熱比γは 1.4 程度の値であるので，この等温音速は実測値よりかなり低い値をとる．